Chapman – Kolmogorov Denklemi

Chapman – Kolmogorov Denklemi yüksek dereceli ve büyük boyutlu stokastik matrislerle çalışıldığında kolaylık sağlar. P bir stokastik matris olmak üzere

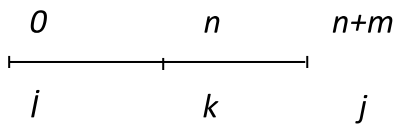
$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$$

$E = \{0,1,2,\dots\}$ olmak üzere $\forall\, i,j \in E$ için

$p_{ij}^{(n)} = P(\, X_{n+k} = j / X_k = i\,).$

Teorem 4 $\quad p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k\in E} p_{ik}^{(n)}\, p_{kj}^{(m)} \qquad \forall\, i,j \in E \qquad (8)$

İspat.



$$p_{ij}^{(n+m)} = P(\, X_{m+n} = j / X_0 = i\,)$$

$$= \sum_{k\in E} P(X_{m+n} = j,\ X_n = k / X_0 = i\,) \qquad (9)$$

$$P(X_{m+n} = j, X_n = k / X_0 = i\,) = \frac{P(X_{m+n} = j,\ X_n = k,\ \ X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \qquad (10)$$

(10) eşitliğinin sağ tarafının pay ve paydası $P(X_n = k,\ X_0 = i)$ ile çarpılırsa

$P(X_{m+n} = j, X_n = k / X_0 = i\,)$

$$= \frac{P(X_{m+n}=j,\, X_n=k,\ \ X_0=i)}{P(X_0=i)} \frac{P(X_n=k,\, X_0=i)}{P(X_n=k,\, X_0=i)}$$

$$= \frac{P(X_{m+n} = j / X_n = k\,, X_0 = i\,) P(X_n = k\,/ X_0 = i\,) P(X_0 = i)}{P(X_0 = i)}$$

$$= P(X_{m+n} = j / X_n = k\,) P(X_n = k\,/ X_0 = i\,)$$

$$= p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \qquad (11)$$

(11) ifadesi (9) da yerine yazılırsa teorem ispatlanmış olur.

Örnek. $\{X_n, n \geq 0\}$ bir Markov zinciri, durum uzayı $E = \{a,\ b,\ c\}$ ve geçiş matrisi

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

i. $P(X_1 = b, X_2 = c, X_3 = a, X_4 = b / X_0 = c) = ?$
ii. $P(X_{n+2} = b / X_n = c) = ?$

Çözüm.
i. $P(X_1 = b, X_2 = c, X_3 = a, X_4 = b / X_0 = c) = p_{cb} p_{bc} p_{ca} p_{ab}$

$$= \frac{2}{5}\frac{1}{3}\frac{3}{5}\frac{1}{4} = \frac{2}{100}.$$

ii.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 17/30 & 9/40 & 5/24 \\ 8/15 & 3/10 & 1/6 \\ 17/30 & 3/20 & 17/60 \end{pmatrix}$$

$$P(X_{n+2} = b / X_n = c) = p_{cb}^{(2)} = 3/20$$

Veya Chapman-Kolmogorov eşitliği ile de bulunabilir. $E = \{a,\ b,\ c\}$

$$p_{cb}^{(2)} = \sum_{k \in E} p_{ck}\, p_{kb}$$

$$= p_{ca} p_{ab} + p_{cb} p_{bb} + p_{cc} p_{cb}$$

$$= \frac{3}{5}\frac{1}{4} + \frac{2}{5}.0 + 0.\frac{2}{5} = \frac{3}{20}.$$

$\{\boldsymbol{X_n}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0}\}$ **Olasılık dağılımı**

$$p_j(n) = P(X_n = j)$$

olsun

$$\mathbf{p}(n) = [p_0(n)\ p_1(n)\ p_2(n) \ldots]$$

Burada

$$\sum_{k\in E} p_k(n) = 1$$

$$p_j(0) = P(X_0 = j)$$

başlangıç durum olasılıkları,

$$\mathbf{p}(0) = [p_0(0)\; p_1(0)\; p_2(0) \dots]$$

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0).P$$

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(1).P$$

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1)P$$

olur.

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)P^n$$

Örnek. $\{X_n, n \geq 0\}$ bir Markov zinciri, durum uzayı $E = \{1, 2\}$, başlangıç olasılıkları

$$p_1(0) = P(X_0 = 1) = 1/3$$
$$p_2(0) = P(X_0 = 2) = 2/3$$

veya başlangıç dağılımı

$$\mathbf{p}(0) = [\; p_1(0),\; p_2(0) \;] = [\, 1/3 \,, 2/3 \,]$$

biçiminde ve bir adım geçiş matrisi de aşağıdaki gibidir.

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

i. $P(X_2 = 2,\, X_4 = 1, X_6 = 1, X_{18} = 1/X_0 = 1) = ?$

ii. $P(X_2 = 1, X_7 = 2) = ?$

Çözüm.

i. $P(X_2 = 2,\, X_4 = 1, X_6 = 1, X_{18} = 1/X_0 = 1) =$

$$p_{02}^{(2)}p_{21}^{(3)}p_{11}^{(2)}p_{11}^{(12)} = 0.0270$$

ii. $P(X_2 = 1, X_7 = 2) = \sum_{i=1}^{2} P(X_0 = i)P(\ X_2 = 1,\ \ X_{17} = 2/X_0 = i) =$

$$= P(X_0 = 1)P(X_2 = 1,\ \ X_{17} = 2/X_0 = 1) + P(X_0 = 2)P(X_2 = 1,\ \ X_{17} = 2/X_0 = 2)$$

$$= p_1 p_{11}^{(2)} p_{12}^{(15)} + p_2 p_{21}^{(2)} p_{12}^{(15)} \quad .$$

Burada Stokastik bir matrisin yüksek dereceden kuvvetini bulma problemi karşımıza çıkar. Bu bağlamda bir matrisin k-ıncı kuvvetini hesaplama işlemi aşağıda veriliyor.